

Problème de la ruine du joueur

14 février 2018

Abel possède au départ a euros et Caïn c euros. Ils jouent 1 euro à Pile ou Face avec une pièce équilibrée jusqu'à ce qu'un joueur soit ruiné.

Soit p_n la probabilité qu'a Abel de gagner avec une fortune de n euros. Si $0 < n < a + c$, on a :

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_{n-1}.$$

En effet s'il gagne la première partie (probabilité $\frac{1}{2}$) il faudra qu'il gagne alors avec une fortune de $n + 1$ euros. Au contraire s'il perd la première partie (probabilité $\frac{1}{2}$) il faudra qu'il gagne alors avec une fortune de $n - 1$ euros.

De cette égalité on déduit que pour tout n tel que $0 < n < a + c$,

$$p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1}.$$

La suite (u_n) définie par $u_n = p_n - p_{n-1}$ est donc stationnaire et (p_n) est par conséquent une suite arithmétique. Il existe donc deux réels u et v tels que $p_n = u + vn$.

$p_0 = 0$ car si Abel a une fortune nulle, il est ruiné avant de jouer!

$p_{a+c} = 1$ car si Abel a une fortune égale à $a + c$ c'est que Caïn ne possède rien et Abel a donc gagné sans jouer!

Dans ces conditions, $u = 0$ et $v = \frac{1}{a+c}$. D'où $p_n = \frac{n}{a+c}$. Abel gagne donc avec une probabilité égale à $p_a = \frac{a}{a+c}$.

De la même manière on montrerait que la probabilité de gagner pour Caïn est $\frac{c}{a+c}$.

Ainsi on est sûr que toute partie se terminera nécessairement par la ruine d'un des joueurs (pas de partie de longueur infinie) et que les probabilités de gagner sont proportionnelles aux sommes engagées.

Si on note G la variable aléatoire qui donne le gain d'Abel. Ou bien Abel gagne c euros avec une probabilité $\frac{a}{a+c}$ ou bien il perd a euros avec la probabilité $\frac{c}{a+c}$. L'espérance de G est donc :

$$E(G) = c \times \frac{a}{a+c} - a \times \frac{c}{a+c} = 0.$$

En conclusion plus on est riche, plus on a de chance de gagner contre un adversaire « pauvre » même si la pièce est équilibrée mais la somme que l'on récupérera reste alors faible alors que l'on risque de perdre gros. Ouf! L'honneur est sauf.