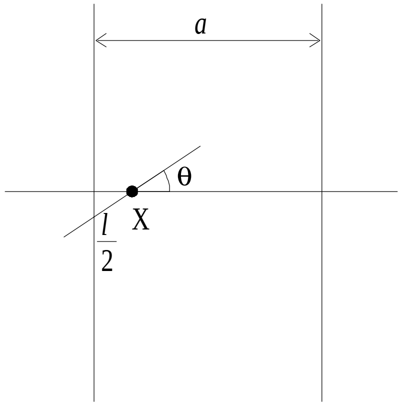
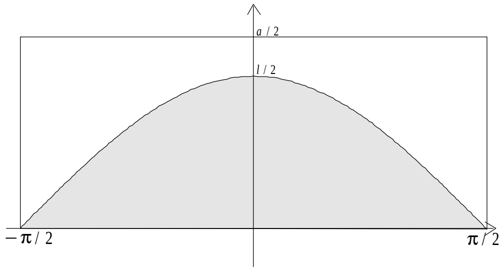
Le problème de l'aiguille de Buffon (1777)

1. Un plan est strié de droites parallèles espacées d'une distance a. On lance au hasard une aiguille de longueur l ($l \leq a$). Avec quelle probabilité l'aiguille coupe-t-elle une des droites ?



Lancer une aiguille au hasard c'est choisir au hasard une abscisse X dans l'intervalle $\left[0;\frac{a}{2}\right]$ puis un angle θ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

X et θ sont deux variables indépendantes, ainsi comme l'aiguille coupe une droite si $X \leq \frac{l}{2}\cos\theta$, la probabilité d'une intersection est :

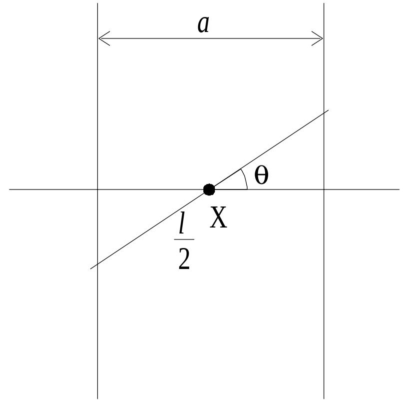


$$P\left(X \leq \frac{l}{2}\cos\theta\right) = \frac{\frac{l}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,\mathrm{d}u}{\pi\frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}$$

C'est le rapport entre l'aire située sous la courbe de la fonction cosinus et l'aire du rectangle de côté $\frac{a}{2}$ et π.

Si on prend une aiguille de longueur $l = \frac{a}{2}$ alors la probabilité précédente vaut $\frac{1}{\pi}$. La simulation consistera donc à générer à partir de la fonction *rnd*, des nombres aléatoires uniformément distribués alternativement dans $\left[0;\frac{a}{2}\right]$ et dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ puis de compter le nombre d'intersections. Une estimation de π sera ensuite obtenue en faisant le rapport du nombre de lancers et du nombre d'intersections.

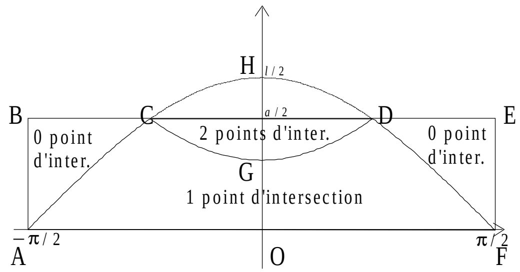
2. Généralisation :



Si $a < l \leq 2a$ alors l'aiguille rencontrera une droite parallèle lorsque $X \leq \frac{l}{2}\cos\theta$ mais il y aura une seconde rencontre lorsque $X \geq a - \frac{l}{2}\cos\theta$.

On désigne par S la variable aléatoire qui donne le nombre de rencontre avec les droites son espérance vaut :

$$E(S) = P\left(X \leq \frac{l}{2}\cos\theta \text{ et } X < a - \frac{l}{2}\cos\theta\right) + 2P\left(X \leq \frac{l}{2}\cos\theta \text{ et } X \geq a - \frac{l}{2}\cos\theta\right).$$



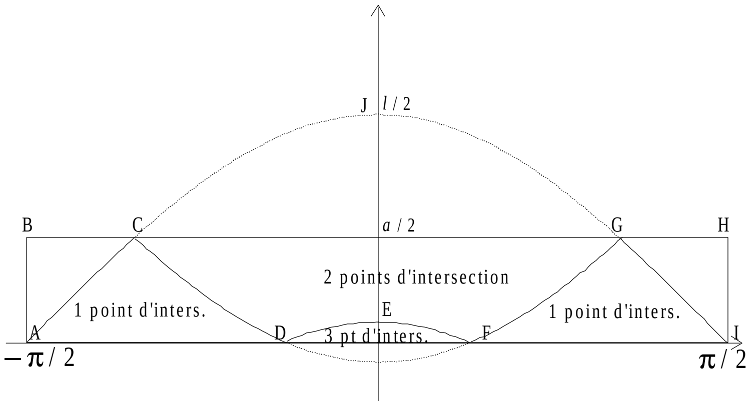
Cette égalité se traduit encore en termes d'aires par :

$$E(S) = \frac{\text{aire(ACGDF)}}{\text{aire(ABEF)}} + 2\frac{\text{aire(CGD)}}{\text{aire(ABEF)}}$$

Comme l'arc CGD est symétrique de l'arc CHD par rapport à la droite (BE), il vient :

$$E(S) = \frac{\text{aire(ACHDF)}}{\text{aire(ABEF)}} = \frac{2l}{\pi a}$$ comme dans le paragraphe **1.**

De même si $2a < l \le 3a$, il peut y avoir trois rencontres avec les droites parallèles, la troisième rencontre se produisant si $X \le -a + \frac{l}{2}\cos\theta$.

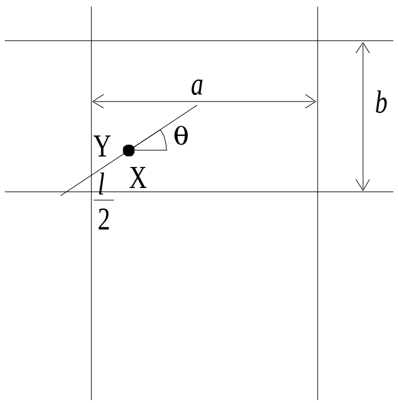


L'espérance de S est alors donnée par :

$$E(S) = \frac{\text{aire}(ACD) + \text{aire}(FGI)}{\text{aire}(ABHI)} + 2\frac{\text{aire}(CDEFG)}{\text{aire}(ABHI)} + 3\frac{\text{aire}(DEF)}{\text{aire}(ABHI)}.$$

Si « on déplie la figure » on obtient encore : $E(S) = \frac{aire(ACJGI)}{aire(ABHI)} = \frac{2l}{\pi a}$.

3. Cas d'un quadrillage :



Le plan est maintenant quadrillé ; a est la distance entre deux droites parallèles verticales consécutives et b la distance entre deux droites parallèles horizontales consécutives.

Dans ces conditions, lancer une aiguille au hasard revient à définir trois variables aléatoires indépendantes X, Y et θ.

X suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left[0; \frac{a}{2}\right]$,

Y une loi uniforme sur l'intervalle $\left[0; \frac{b}{2}\right]$ et θ une loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Le nombre de points d'intersection peut être 0, 1 ou 2.

Si S est la variable aléatoire donnant le nombre de points d'intersections S est la somme de S_X et S_Y où S_X et S_Y désignent le nombre de points d'intersection de l'aiguille avec les parallèles aux axes de coordonnées.

D'après le paragraphe **2.** On a :

$$E(S) = E(S_X) + E(S_Y) = \frac{2l}{\pi a} + \frac{2l}{\pi b}.$$

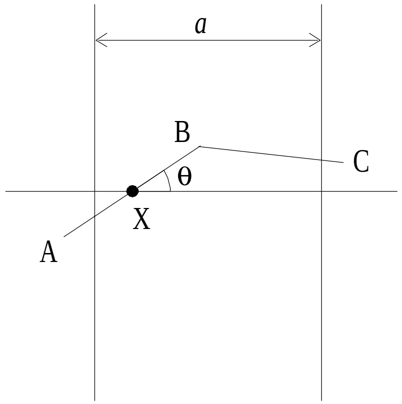
Dans le cas où $a = b$, $E(S) = \frac{4l}{\pi a}$

Pour estimer π il suffit de prendre une aiguille de longueur $l = a$. dans ce cas une valeur approchée de π sera obtenue en prenant quatre fois le rapport entre le nombre total de lancers et le nombre d'intersections.

4. Autre approche (d'après Arthur Engel – CEDIC)

On lance à nouveau une aiguille de longueur l ($l \le a$) dans un plan strié comme dans le paragraphe **1.** avec des droites parallèles distantes de a.

Si S désigne le nombre d'intersections de l'aiguille avec les droites parallèles alors :
E (S) = f (l) où f est une fonction croissante, telle que $\lim_{0} f = 0$. Dans ce cas on a en effet : $E(S) = P(X \le \frac{l}{2}\cos\theta)$. Si l'aiguille a une longueur dépassant a, alors on peut la « découper » en n tronçons de même longueur plus petite que l.



Dans ces conditions comme S est la somme des points d'intersection de chaque morceau avec les axes on a : $E(S) = f(l) = nf(\frac{l}{n})$ ce qui prouve que f est encore une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

Si on lance maintenant une ligne brisée ABC, alors S = $S_1 + S_2$, S_1 et S_2 étant les nombres de points d'intersections de [AB] et de [BC] avec les droites parallèles.

Comme $E(S_2)$ ne dépend pas de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, E (S) garde la même valeur lorsque cet angle est nul.
Dans ces conditions : $E(S) = E(S_1) + E(S_2)$ devient :

$$f\ (l_1 + l_2) = f\,(l_1) + f\,(l_2)\ (**)$$

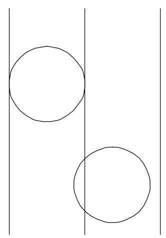
où l_1 et l_2 sont les longueurs respectives des segments [AB] et [BC].

De f croissante et de l'égalité (**) on déduit que f est linéaire et pour toute ligne brisée de longueur l on a donc :

$$E\ (S) = f\,(l) = l\,f\,(1).\ (*)$$

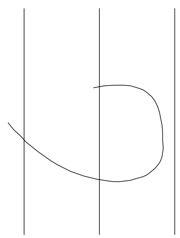
> En effet par récurrence il est aisé de montrer que pour tout entier naturel n :
>
> $$f\,(n\,l) = n\,f\,(l).$$
>
> Puis on montre que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ on a $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$.
>
> Puis enfin si on encadre l réel positif quelconque, par une suite croissante de rationnels (u_n) et une suite décroissante de rationnels (v_n) telles que $\lim u_n = \lim v_n = l$, alors de la croissance de f on tire :
>
> $$f(u_n) \leq f(l) \leq f(v_n).$$
>
> puis : $u_n f(1) \leq f(l) \leq v_n f(1)$ et enfin par passage à la limite :
>
> $$lf(1) \leq f(l) \leq lf(1).$$

Par passage à la limite on généralise la formule (*) à tout « fil de fer » c'est à dire tout arc géométrique de longueur l.



En particulier pour un cercle de diamètre a, ayant toujours deux points d'intersection avec les droites parallèles du plan on a :

$$E(S) = f(\pi a) = \pi a f(1) = 2.$$



Donc pour tout « fil de fer » de longueur l l'espérance du nombre d'intersection S avec les droites parallèles vaut : $E(S) = \frac{2l}{\pi a}$.