Combien d'essais pour gagner *n* fois à un jeu ?

On lance plusieurs fois un dé équilibré à six faces. Sachant que l'on gagne chaque fois que le chiffre 6 sort, combien de fois doit-on jouer en moyenne pour gagner 10 fois ?

On peut penser que ce nombre sera $\widehat{\mathrm{N}}=\dfrac{10}{\dfrac{1}{6}}=60$. Démontrons le et généralisons.

La probabilité de gain est p. On fait plusieurs essais indépendants et on s'arrête dès qu'on obtient n succès. Le nombre d 'essai est une variable aléatoire N, nécessairement supérieur ou égal à n, et qui vérifie pour tout entier $k \geqslant n$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{N}=k)=\binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$$

En effet N = k si :
- le dernier jeu est gagnant
- parmi les $k-1$ jeux précédents, $n-1$ sont gagnants.

On dit que N suit une loi binomiale négative.

On sait par ailleurs que pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1}=\frac{1}{1-x}$. Par dérivations successives on obtient alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)x^{k-2}=\frac{1}{(1-x)^2}$, puis de proche en proche :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)x^{k-n}=\frac{2\times 3\times\dots\times(n-1)}{(1-x)^n} \quad (1).$$

On vérifie alors aisément grâce à (1) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{N}=k)=1$.

Par ailleurs N a pour espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{N})=\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)(n-2)\dots 2\times 1}(1-p)^{(k-n)}p^n.$$

D'où :

$$\mathrm{E}(\mathrm{N})=n\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{(k-1)\dots(k-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\times 1}(1-p)^{(k-n)}p^n=n\frac{1}{(1-(1-p))^{n+1}}p^n=\frac{n}{p}$$

en remplaçant dans (1) x par $1-p$, $k-1$ par k et $n-1$ par n.

De même $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)(n-2)\dots 2\times 1}(1-p)^{(k-n)}p^n=\mathrm{E}(\mathrm{N}^2)+\frac{n}{p}$ et par une méthode analogue à la méthode précédente on en déduit que :

$$n(n+1)\frac{1}{(1-(1-p))^{n+2}}p^n=\mathrm{E}(\mathrm{N}^2)+\frac{n}{p}.$$

D'où : $\displaystyle\mathrm{V}(\mathrm{N})=\mathrm{E}(\mathrm{N}^2)-(\mathrm{E}(\mathrm{N}))^2=\frac{n(n+1)}{p^2}-\frac{n}{p}-\left(\frac{n}{p}\right)^2=\frac{n}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right).$