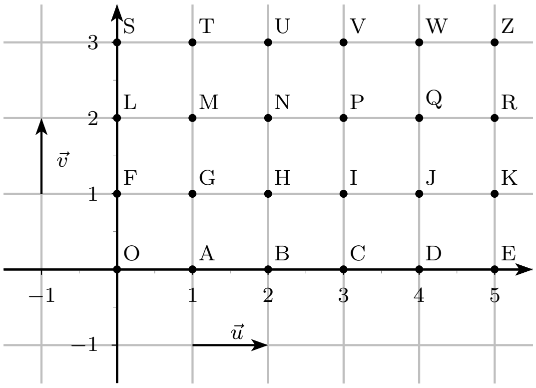
La loi binomiale

1 Activités

1. Promenade sur un quadrillage



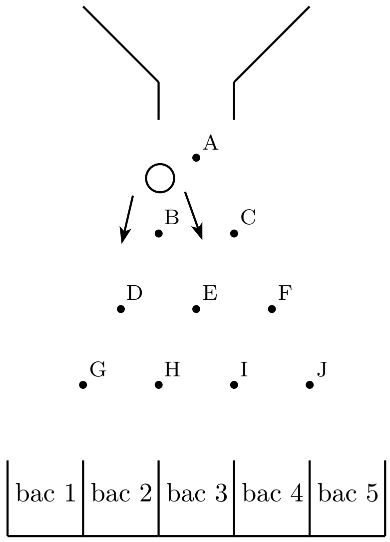
Une fourmi se déplace sur un quadrillage mais uniquement dans le sens des deux flèches $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi elle peut aller du point I au point J ou du point G au point M mais pas de B vers A ou de N vers H. Le but de cette activité est de trouver le nombre de chemins possibles reliant le point O à un point donné de la grille.

a) Par combien de chemins peut-on aller de O à C ? à L ? à G ? à I ? à N ?

b) Compter le nombre de chemins permettant d'aller de O à H, de O à C puis de O à I. Même question avec S, M et T. Même question avec M, H et N. En déduire une méthode pour déterminer le nombre de chemins différents permettant d'atteindre un point quelconque du quadrillage.

c) Indiquer à côté de chaque point du quadrillage le nombre de chemins permettant d'atteindre ce point.

2. La planche de Galton



Une planche de Galton est une planche verticale sur laquelle on a disposé des clous en quinconce. Plusieurs billes sont jetées au dessus du clou A et tombent avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ sur le clou B ou le clou C. La bille étant au dessus de B elle aura de même une chance sur 2 de tomber sur D et une chance sur 2 de tomber sur E. À chaque étage elle tombera soit à gauche soit à droite d'un clou avec la probabilité $\frac{1}{2}$ jusqu'à atteindre les bacs situés en dessous des clous G, H, I, J.

a) Quelle est la probabilité pour qu'une bille partant de A arrive sur les clous D, E, F ?
Remarque : pour arriver sur E elle doit passer par B ou par C.

b) Quelle est la probabilité pour qu'une bille partant de A arrive sur les clous G, H, I, J ?

c) Déterminer enfin les probabilités d'arriver dans les différents bacs.
Voir http ://jpq.pagesperso-orange.fr/proba/galton/ pour une simulation du fonctionnement de la planche de Galton.

2 Coefficient binomial

1. **Définition :** Pour tout entiers n et k tel que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial le nombre noté $\binom{n}{k}$ qui se trouve à la n-ième ligne et la colonne de rang k.

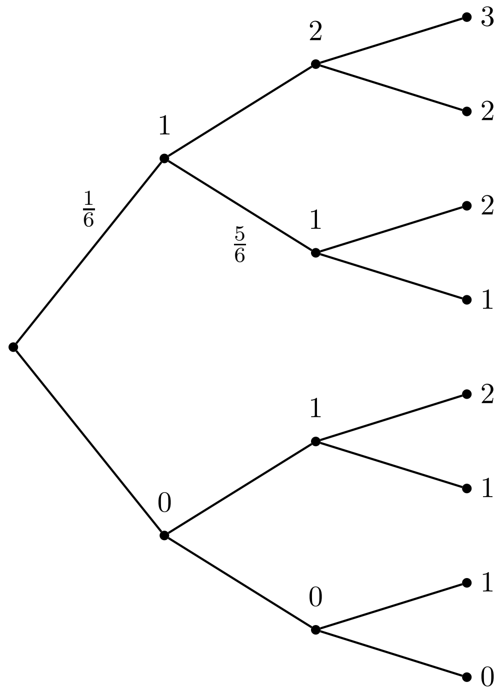
$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

2. EXERCICE : compléter en inscrivant deux lignes supplémentaires.
3. EXERCICE : compléter $\binom{2}{1} =$, $\binom{3}{1} =$, $\binom{4}{2} =$, $\binom{4}{3} =$, $\binom{n}{0} =$, $\binom{n}{n} =$, $\binom{n}{1} =$, $\binom{n}{n-1} =$.
4. **Propriétés**
   a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
   b) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
   c) Pour tous entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

3 Loi binomiale

1. **Loi de Bernoulli**
   a) Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant deux résultats ou issues qu'on peut noter 1 ou 0.
   Ces deux issues sont aussi notées S et E pour « succès » et « échec ».
   b) Une **loi de Bernoulli** de paramètre p est une loi définie sur $\mathrm{E} = \{0, 1\}$, la probabilité d'obtenir 1 étant p et la probabilité d'obtenir 0 étant $1 - p$.
   EXERCICE : Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire définie précédemment.
2. **Schéma de Bernoulli :** c'est une répétition d'épreuves de Bernoulli de même loi et indépendantes.
3. Si on réalise n épreuves de Bernoulli de même loi de paramètre p et indépendantes, le nombre de succès est un nombre compris entre 0 et n. La loi définie sur l'ensemble $\mathrm{E} = \{0, 1, 2 \ldots n\}$ est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p. Notation $\mathcal{B}(n, p)$.

4.



Étude d'un exemple

On lance trois fois un dé symétrique et on s'intéresse au nombre de côtés 6 obtenus. On note X la variable aléatoire qui donne ce nombre.

a) Compléter l'arbre ci-contre.

b) Compléter :

$\mathrm{P}\ (\mathrm{X}=3) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^3.$

$\mathrm{P}\ (\mathrm{X}=2) =$

$\mathrm{P}\ (\mathrm{X}=1) =$

$\mathrm{P}\ (\mathrm{X}=0) =$

c) Calculer E (X) et V (X)

5. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors l'ensemble des valeurs prises par X est $\{0, 1, 2 \dots n\}$ et pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, 2 \dots n\}$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k} \text{ avec } q = 1-p.$$

Voir http ://jpq.pagesperso-orange.fr/proba/arbre_binomiale/ pour afficher l'arbre de probabilité et pour comprendre le pourquoi du $\binom{n}{k}$.

Voir http ://jpq.pagesperso-orange.fr/proba/loibinomiale/binomiale3.html pour afficher des diagrammes en bâtons.

6. **Propriété admise :** la loi binomiale de paramètres n et p (notation $\mathcal{B}(n,p)$) a pour espérance mathématique $n\,p$, pour variance $n\,p(1-p)$ et donc pour écart-type $\sqrt{n\,p(1-p)}$.

7. Avec la TI 83 PLUS :

- Combinaison du menu PRB du menu math retourne le coefficient binomial. Usage : n Combinaison k.
- BinAléat du menu PRB retourne un nombre aléatoire suivant la loi binomial ? Usage : BinAléat(n, p).
- binomFdp (n, p, k) du menu distrib retourne $p(\mathrm{X}=k)$
- binomFRép (n, p, k) du menu distrib retourne $p(\mathrm{X} \leqslant k)$

8. Avec la CASIO GRAPH 75 :

- n nCr k retourne le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (accessible par OPTN -> ▷ -> PROB -> nCr)
- RanBin# (n, p) retourne un nombre aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$) (accessible par OPTN -> ▷ -> PROB -> RAND -> Bin)
- BinomialPD (k, n, p) retourne $p(\mathrm{X}=k)$ et BinomialPD (n, p)la liste complète (accessible par OPTN -> STAT -> DIST -> BINM -> BPD)
- BinomialCD (k, n, p) retourne $p(\mathrm{X} \leqslant k)$ et BinomialCD (n, p) les valeurs de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(n,p)$)
- InvBinomialCD (q, n, p) retourne le plus petit k tel que $p(\mathrm{X} \leqslant k) \geqslant q$