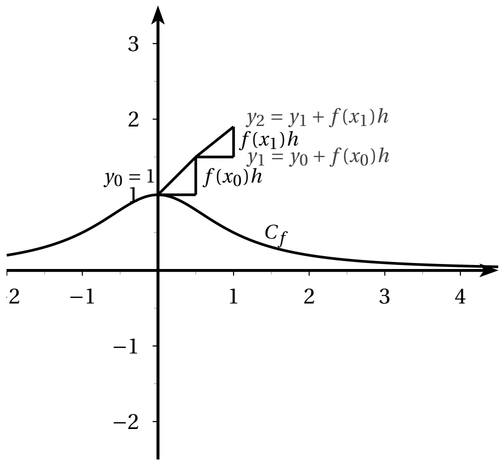
La méthode d'Euler

11 janvier 2018

La méthode d'Euler consiste à obtenir une courbe approchée d'une fonction dont on connait seulement une équation différentielle.



Ainsi on démontre que l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x^{+}1}$ admet les solutions :

$$y(x) = \arctan(x) + k.$$

Si on impose en plus la condition $y(0) = 1$ alors l'équation admet une solution unique qui est :

$$y(x) = \arctan(x) + 1.$$

La méthode d'Euler consiste à construire la courbe à partir des suites (x_n) et (y_n) définies par :
$x_0 = 0$,
$y_0 = 1$,
$x_{n+1} = x_n + h$,
$y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{x_n^2 + 1} h$.
Cela permet d'obtenir lorsque h est petit des points $M(x_n, y_n)$ proches de la courbe de la fonction solution.

Autre exemple :

On démontre que l'équation différentielle $y' = -y + 1$ admet les solutions :

$$y(x) = 1 - k\mathrm{e}^{-x}.$$

et la solution telle que $y(1) = 0$ est dans ces conditions :

$$y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

La méthode d'Euler consiste dans ce cas à construire des suites (x_n) et (y_n) telles que :
$x_0 = 0$,
$y_0 = 0$,
$x_{n+1} = x_n + h$,
$y_{n+1} = y_n + (-y_n + 1)h$.
Cela permet d'obtenir lorsque h est petit des points $M(x_n, y_n)$ proches de la courbe de la fonction solution.